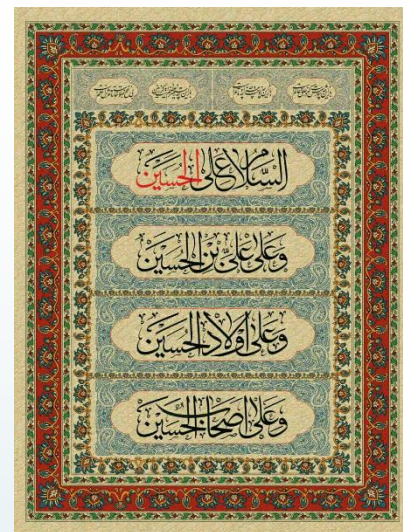




راه حل های چندگانه در آموزش ریاضی

۲۴ شهریور ۱۴۰۰

دانشگاه فرهنگیان اصفهان

ابراهیم ریحانی

دانشگاه تربیت دبیر شهید رجایی



تصاویر جلد برخی از کتاب های درسی ریاضی قدیم و جدید



برخي از رویکردها و فرآیندهای نوین آموزشی در کتاب های درسی جدید ریاضی

- حل مسئله
- راهبرد های حل مسئله
- راه حل های چند گانه- حل مسئله به روش های مختلف
- مسائل باز پاسخ
- طرح مسئله
- بررسی بدفهمی ها
- استدلال
- گفتمان ریاضی
- اتصالات و ارتباطات ریاضی
- بازنمایی های ریاضی

حل مسئله به روش هاي مختلف

اطلاع از اینکه مسائل مي توانند با راه هاي مختلف حل شوند در روشي که دانش آموزان با مسائل برخورد مي کنند تاثير خواهد گذاشت. دانش آموزي که فکر مي کند تنها یک "راه درست" براي حل مسئله وجود دارد ممکن است که روي مسئله خاصي مدتي فکر کند و اگر توفیقي حاصل نکرد آن را رها کند و منتظر بماند تا در کلاس تکنیک حل به او ارائه شود و اين الگويي است که بیشتر دانش آموزان ما در مدرسه بکار مي گیرند(ريس و همکاران، 1999).

کمک به کودکان در یادگیری ریاضیات

➤ دانش آموزان باید با مسائلی روبرو شوند که راه حل آن ها روشن نیست، آن ها باید به آزمودن بسیاری از **راه های مختلف حل مسئله** تشویق شوند.

➤ لازم است مسئله ها در حدی مشکل باشند که برای دانش آموزان چالش ایجاد کنند، اما سختی مسئله ها نباید به اندازه ای باشند که آن ها را تبدیل به یک معمای غیر قابل حل کند.

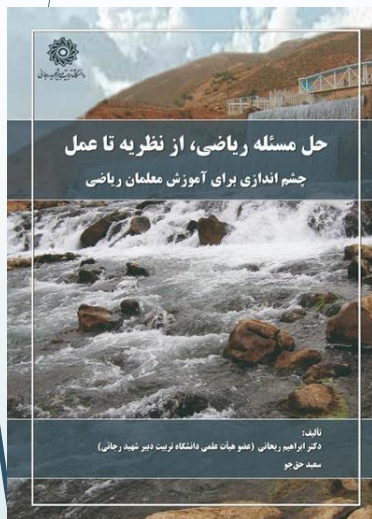
➤ کودکان تصور می کنند که مسائل باید به سهولت حل شوند.

➤ تدریس موثر حل مسئله به زمان احتیاج دارد.



معیارهای یک مسئله (تکلیف) ریاضی خوب

پژوهش‌ها (به طور مثال لستر و کای، 2016؛ مکینتاش، 2000؛ شونفلد، 2005) مشخص می‌کنند که مسئله "خوب"، مسئله‌ای است که:



- دارای ریاضیات مهم و مفیدی است که در آن گنجانده شده است.
- دانش‌آموزان می‌توانند با استفاده از راهبردهای حل مختلف به این مسئله بپردازند.
- راه‌حل‌های مختلفی دارد یا این اجازه را می‌دهد که تصمیمات یا مواضع مختلفی اتخاذ شده و مورد دفاع قرار گیرند.
- نباید همیشه یک پاسخ معین و مشخصی داشته باشد، بلکه بر مسائل بازپاسخ نیز تأکید داشته باشد که موجب تقویت، نوآوری و قوه‌ی ابتکار فراگیران شود و آن‌ها را به جستجوی بیشتر در عرصه‌ی آموزه‌های ریاضی وا دارد.
- دانش‌آموز را به مشارکت و گفتگو ترغیب می‌کند.
- نیاز به تفکر و حل مسئله سطح بالاتر را پیش می‌کشد.
- غیر معمولی باشد.

معیارهای یک مسئله (تکلیف) ریاضی خوب

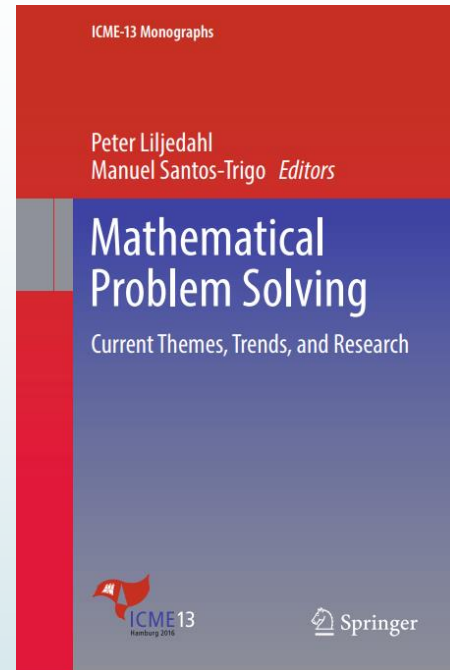
7

- در توسعه درک مفهومی دانش آموزان نقش آفرینی دارد.
- به دیگر ایده‌های ریاضی مهم ارتباط می‌یابد.
- استفاده ماهرانه از ریاضیات را ترغیب می‌کند.
- فرصتی را برای تمرین مهارت‌های مهم در اختیار قرار می‌دهد.
- فرصتی را برای ارزیابی دانش آموزان توسط معلم و یافتن نقاط ضعف آن‌ها ایجاد می‌کند.
- به سادگی با استفاده از یک رویه‌ی از پیش آموخته شده، قابل حل نیست.
- چالش برانگیز و در عین حال قابل دست‌یابی توسط دانش آموزان است.
- نیازمند پافشاری است.
- تکراری و خسته کننده نباشد و توانایی ابتکار شاگردان را در فعالیت‌های حل مسئله افزایش دهد.

Lester and Cai (2016) mention that teachers should provide learning conditions for students to engage in a variety of problem-solving activities that include:

- “(1) finding multiple solution strategies for a given problem,
- (2) engaging in problem posing and mathematical explorations,
- (3) giving reasons for their solutions, and
- (4) making generalizations” (p. 13).

That is, looking for different ways to solve a task, discussing what concepts are used, and exploring ways to extend mathematical tasks become an important goal for learners to pursue in the process of development their problem-solving competencies.



Multiple-solution tasks: from a teacher education course to teacher practice

Roza Leikin

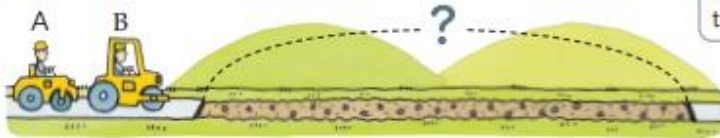
A **multiple-solution task** is an assignment in which a student is explicitly required to solve a mathematical problem in different ways. Solutions to the same problem are considered to be different when they are based on:

- (a) different **representations** of some mathematical concepts involved in the task,
- (b) different properties (**definitions or theorems**) of mathematical objects within a particular field or
- (c) **different properties** of a mathematical object in different fields (Leikin, 2007).

در نگاه از حوزه موضوعی ریاضی، تفاوت بین این راه‌حل‌ها در سه محور بازنمایی‌های متفاوت از یک مفهوم ریاضی، ارائه‌ی تعاریف و ویژگی‌های متفاوت برای یک مفهوم خاص در ریاضی و یا نگرش به یک مقوله از شاخه‌های متفاوت ریاضی، انعکاس خواهد یافت (لیکین، ۱۳۸۰).

- 1 To pave a certain street, it will take machine A 15 days while machine B can finish it in 10 days. If both machines A and B are used, how many days will it take to pave this street?

We don't know the length of the street...



Hiroki

- 1 Based on the ideas of the following two students, find the answer.



Hiroki

I'm going to think by using a hypothetical length.

- ① Assume the length of the street is 30m.
How many meters can each machine pave in one day?

A $30 \div 15 = \square$ (m)

B $30 \div 10 = \square$ (m)



Why did he pick 30m as the hypothetical length?

- ② If we use both machines A and B, how many meters can we pave in one day? How many days will it take to complete paving the street?



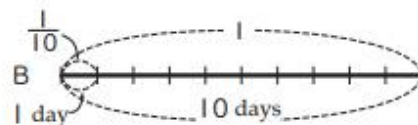
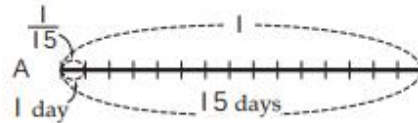
Figure out the answer if we use 90m as the hypothetical length of the street, and compare the answers.



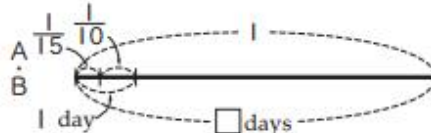
Kaori

I'm going to consider the length of the street to be 1.

- ① If we consider the length of the street to be 1, how much of the street can each machine pave in one day?



- ② If we use both machines A and B, how much of the street can they pave together in one day? How many days will it take to complete paving the street?



ریاضی پایه ششم ابتدایی ژاپن (2012)

- 2 It takes machine C 12 days to pave this street. If we use machines A, B, and C together, how many days will it take to complete paving the street?



Hiroki

The least common multiple of 15, 10 and 12 is 60. So, we assume the length of the street is 60m. Then, the lengths each machine can pave in one day are:

A $60 \div 15 = \square$ (m)

B $60 \div 10 = \square$ (m)

C $60 \div 12 = \square$ (m)

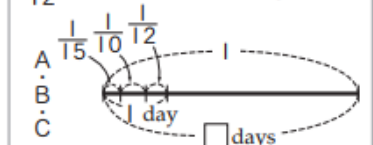
So, if we use all three machines together, we can pave $\square$ m in one day.

$60 \div \square = \square$ Answer $\square$ days



Kaori

If we consider the length of the street to be 1, machine C can pave $\frac{1}{12}$ of the street in one day.



If we use all three machines together, we can pave $\square$ of the street in one day.

$1 \div \square = \square$ Answer $\square$ days

- 3 Compare the two students' ideas and discuss what you noticed.



Shinji

It is easy to think about the problem if you pick the length of the street, but it can be tedious to change the length.

Even if when we added machine C, the whole street is still considered as 1, isn't it?

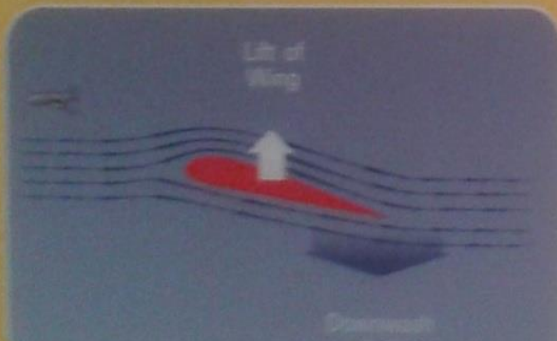


Miho

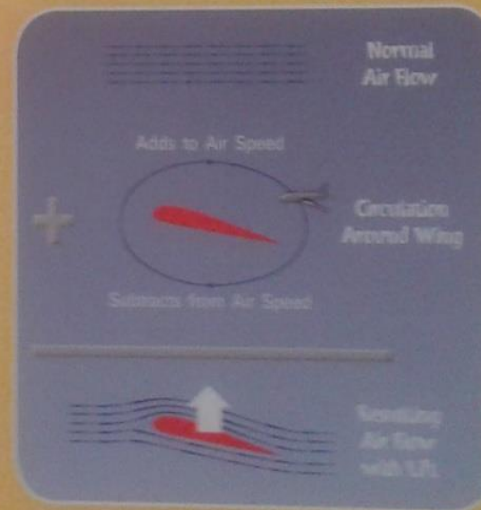
There's More than One Way to Explain How an Airplane Flies

The exhibits in this section of the gallery demonstrate how a difference in air pressure on the upper and lower surfaces of a wing creates lift. This pressure difference can be calculated accurately for both subsonic and supersonic flight. But there are also two other ways of explaining how lift is created.

The Momentum Explanation of Lift



The Circulation Theory of Lift



This is the oldest and most complex theory of lift. It explains how the difference in air speed over and under the wing results from a net "circulation" of air. Above the wing, the circulatory flow adds to the overall speed of the air; below the wing, it subtracts. But the actual force on the wing results

برنامه درسی مدارس ابتدایی چین برآن است تا لااقل سه عادت فکری را در دانش آموزان رشد دهد:

□ اولین عادت تفکر، بررسی روابط کمی از جنبه های مختلف است. دانش آموزان به طور مداوم، و با فراهم نمودن فرصت هایی، تشویق می شوند تا یک رابطه کمی را به روش های متفاوتی نمایش دهند. در سراسر برنامه درسی مدارس ابتدایی چین، مثال ها و مسائل فراوانی وجود دارند که نیازمند شناسایی روابط کمی و نمایش آنها به شیوه های چند گانه توسط دانش آموزان هستند (کای، 2004).

□ دومین عادت تفکر، حل یک مسئله با استفاده از هر دورویکرد حسابی و جبری است.

□ سومین عادت تفکر در ریاضیات مدرسه چینی استفاده از عملیات معکوس برای حل معادلات است.

Advances in Mathematics Education

Jinfa Cai
Eric Knuth Editors

Early Algebraization

A Global Dialogue
from Multiple Perspectives

 Springer

انتظارات از دانش آموزان در حل مسائل به شکل حسابی و نیز جبری به شیوه های مختلف را آشکارا می توان در برنامه درسی چین دید و این چنین انتظاراتی توسط معلمان چینی در کلاس های درس رایج هستند. علاوه بر این، از دانش آموزان خواسته می شود که روش های حسابی و روش های جبری بازنمایی روابط کمی را با هم مقایسه کنند.

مدرسه ابتدایی لیمنگ مبلغی برای خرید 12 توپ بسکتبال، از قرار 24 یوان برای هر یک کنار گذاشته است. قبل از خرید این توپ ها آن ها تصمیم گرفتند که 144 یوان از این مبلغ را برای خریدن تعدادی توپ فوتبال هزینه کنند. آن ها چند توپ بسکتبال می توانند بخرند؟

**Developing Students' Algebraic Thinking
in Earlier Grades: Lessons from China
and Singapore**

Jinfa Cai, Swee Fong Ng, and John C. Moyer

مدرسه ابتدایی لیمنگ مبلغی برای خرید 12 توپ بسکتبال، از قرار 24 یوان برای هر یک کنار گذاشته است. قبل از خرید این توپ ها آن ها تصمیم گرفتند که 144 یوان از این مبلغ را برای خریدن تعدادی توپ فوتبال هزینه کنند. آن ها چند توپ بسکتبال می توانند بخرند؟

راه های حسابی

راه حل اول: محاسبه مبلغ اصلی و سپس کم کردن آن از پول صرف شده برای توپ های فوتبال :

$$(24 \times 12 - 144) \div 24 = 144 \div 24 = 6$$

راه حل دوم: کم کردن تعداد توپ های بسکتبالی که حالا نمی تواند بخرد از تعداد 12 توپ اولیه :

$$12 - (144 \div 24) = 6$$

راه حل سوم :

فرض کنیم که مدرسه هنوز می تواند X توپ بسکتبال بخرد :

$$(24 \times 12 - 144) = 24x$$

راه حل چهارم :

فرض کنیم که مدرسه هنوز می تواند X توپ بسکتبال بخرد :

$$24 \times 12 = 24x + 144$$

راه حل پنجم :

فرض کنیم که مدرسه هنوز می تواند X توپ بسکتبال بخرد :

$$12 = (144 \div 24) + x$$

دانش آموزان در پایه 6 تشویق می شوند تا چهار روش مختلف را برای حل مسئله درصد زیر به کار برند :

16

یک کارخانه، فرآیند تولید محصول خود را اصلاح کرد. پس از آن، هزینه تولید یک محصول 37.40 یوان شد که 15٪ کمتر از هزینه آن، قبل از فرآیند اصلاح تولید محصول است. هزینه تولید همان محصول آن قبل از فرآیند اصلاح تولید محصول چقدر بوده است؟

راه حل دوم : (حسابی)

اگر هزینه پیش از اصلاح به عنوان واحد
در نظر گرفته شود، آن گاه 37.40،
15% کمتر است یا

$$85\% = 1 - 15\% \text{ یعنی } 85\%$$

هزینه قبل از اصلاح. بنابراین هزینه پیش
از اصلاح برابر است با :

$$37.4 \div 85\% = 44$$

راه حل اول : (جبری)

اگر هزینه پیش از اصلاح به عنوان واحد 1 در
نظر گرفته شود، هزینه اخیر کمتر از آن است.

فرض کنیم $x =$ هزینه پیش از اصلاح

$$x - 15\%x = 37.4$$

$$(1 - 15\%)x = 37.4$$

$$85\%x = 37.4$$

$$x = 44$$

راه حل تصویری

17

هزینه پیش از اصلاح

37.40

هزینه اخیر

15%

راه حل سوم:

به طریق مشابه، اگر هزینه پیش از اصلاح به عنوان واحد در نظر گرفته شود، شکل مقابل برای بازنمایی مسئله می تواند به کار گرفته شود. چون هزینه اخیر 15% کمتر از هزینه قبل از اصلاح است، هزینه اخیر 85% هزینه قبلی است. بنابراین هزینه پیش از اصلاح $44 = 37.4 \div 85\%$ یوان بوده است.

راه حل چهارم (نسبت)

به دلیل اینکه 85% یک نسبت را نیز نمایش می دهد، نسبت هزینه قبل از اصلاح به بعد از اصلاح 85 به 100 است. این باید برابر نسبت 37.40 به x باشد. بنابراین:

$$37.4/x = 85/100$$

بنابراین هزینه پیش از اصلاح $44 = 37.4 \div 85\%$ یوان بوده است.

بدون شک رویکرد درخواست از دانش آموزان برای استفاده و مقایسه این چهار روش از راه حل های متفاوت (جبری، حسابی، تصویری و نسبت) بر اساس آن اصل است که در نظر گرفتن دیدگاه های چند گانه می تواند درکی عمیق از روابط بین کمیت ها را پرورش دهد (کای و همکاران، 2011).

مسئله ای از آزمون ریاضی عمومی (1)

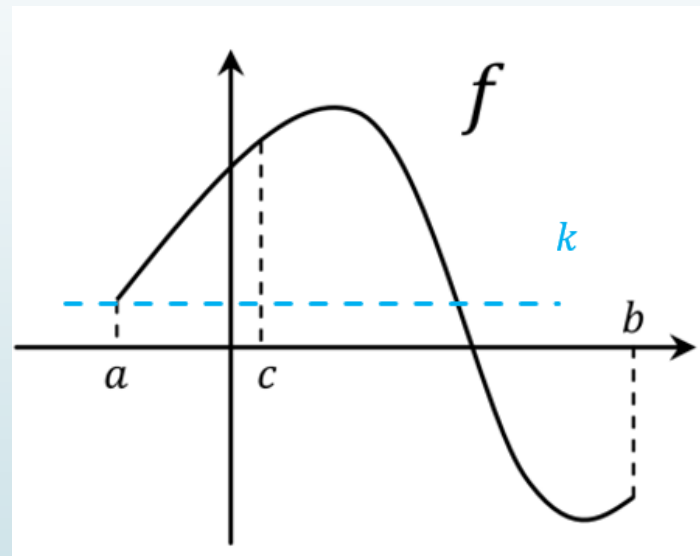
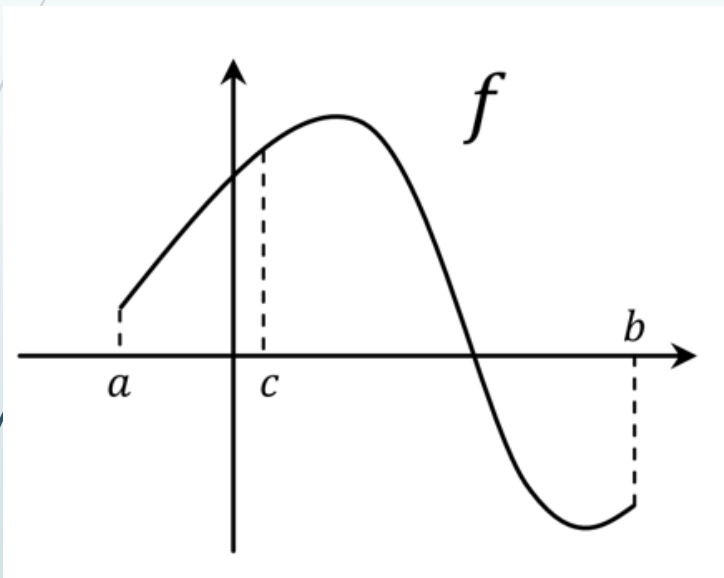
فرض کنید f یک تابع پیوسته در بازه‌ی $[a, b]$ باشد و مقداری چون c در بازه‌ی (a, b) وجود داشته باشد به طوری که $f(b) < f(a) < f(c)$.
ثابت کنید دست کم دو نقطه‌ی x_1 و x_2 در بازه‌ی $[a, b]$ وجود دارند که:

$$f(x_1) = f(x_2)$$

فرض کنید f یک تابع پیوسته در بازه‌ی $[a, b]$ باشد و مقداری چون c در بازه‌ی (a, b) وجود داشته باشد به طوری که $f(b) < f(a) < f(c)$.

ثابت کنید دست کم دو نقطه‌ی x_1 و x_2 در بازه‌ی $[a, b]$ وجود دارند که:

$$f(x_1) = f(x_2)$$



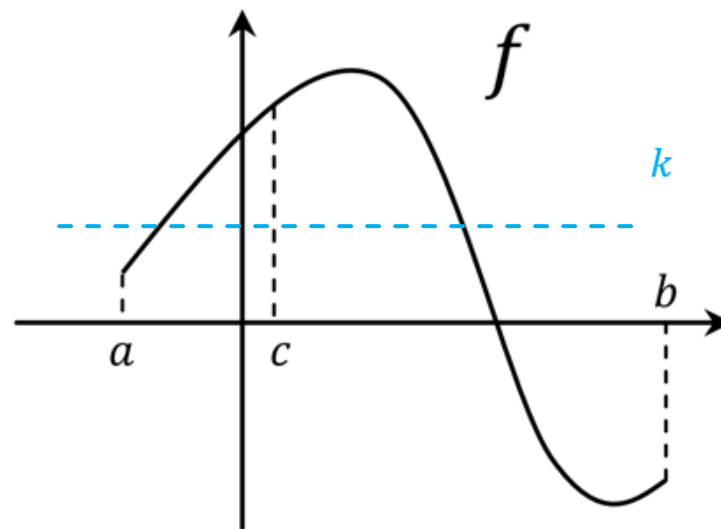
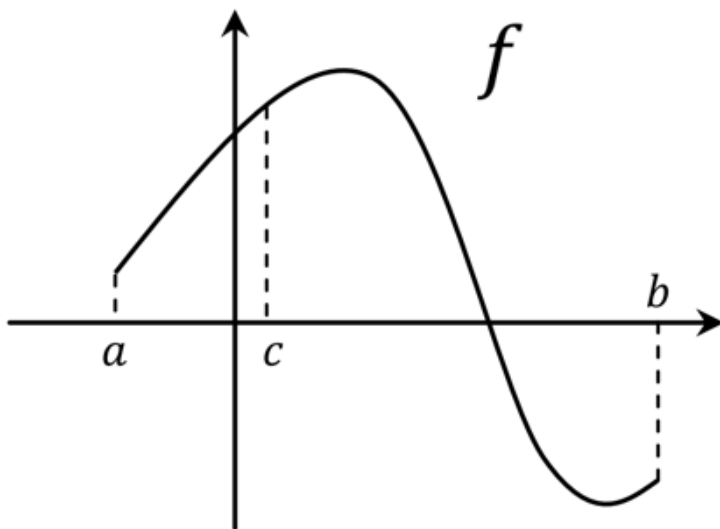
f بر $[c, b]$ پیوسته و $f(a)$ بین $f(c)$ و $f(b)$ قرار دارد.

بنا بر قضیه مقدار میانی: $\exists x_1 \in (c, b), f(x_1) = f(a)$

فرض کنید f یک تابع پیوسته در بازه‌ی $[a, b]$ باشد و مقداری چون c در بازه‌ی (a, b) وجود داشته باشد به طوری که $f(b) < f(a) < f(c)$.

ثابت کنید دست کم دو نقطه‌ی x_1 و x_2 در بازه‌ی $[a, b]$ وجود دارند که:

$$f(x_1) = f(x_2)$$



$$f(b) < f(a) < k < f(c)$$

فرض کنید f یک تابع پیوسته در بازه‌ی $[a, b]$ باشد و مقداری چون c در بازه‌ی (a, b) وجود داشته باشد به طوری که $f(b) < f(a) < f(c)$.
 ثابت کنید دست کم دو نقطه‌ی x_1 و x_2 در بازه‌ی $[a, b]$ وجود دارند که:

$$f(x_1) = f(x_2)$$

$$g(x) = f(x) - f(a)$$

$$\begin{aligned} g(b) &= f(b) - f(a) < 0 \\ g(c) &= f(c) - f(a) > 0 \end{aligned} \rightarrow \exists x_1 \in (c, b) \rightarrow g(x_1) = 0$$

$$g(x_1) = 0 \rightarrow f(x_1) - f(a) = 0 \rightarrow f(x_1) = f(a)$$

فرض کنید f یک تابع پیوسته در بازه‌ی $[a, b]$ باشد و مقداری چون c در بازه‌ی (a, b) وجود داشته باشد به طوری که $f(b) < f(a) < f(c)$.

ثابت کنید دست کم دو نقطه‌ی x_1 و x_2 در بازه‌ی $[a, b]$ وجود دارند که:

$$f(x_1) = f(x_2)$$

برهان خلف

$$\sim (p \Rightarrow q) \equiv p \wedge \sim q$$

$$\sim (\exists x_1, x_2, f(x_1) = f(x_2)) \equiv \forall x_1, x_2, f(x_1) \neq f(x_2)$$

$$f \text{ بر } [a, b] \text{ پیوسته و } f(b) < f(a) < f(c)$$

x_1, x_2 ای پیدا نمی شود که $f(x_1) = f(x_2)$. پس f در $[a, b]$ یک به یک است، در نتیجه f در $[a, b]$ یک‌نواست. پس f بر $[a, b]$ نزولی است. چون $c \in (a, b)$ و f نزولی باشد، باید $f(a) > f(c)$ باشد که با فرض در تناقض است.

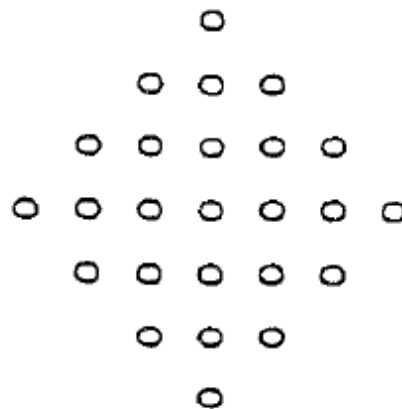
GENERATING MULTIPLE SOLUTIONS FOR A PROBLEM: A
COMPARISON OF THE RESPONSES OF U.S. AND JAPANESE
STUDENTS*Educational Studies in Mathematics* 28: 35–54, 1995.

© 1995 Kluwer Academic Publishers. Printed in the Netherlands.

ABSTRACT. A task involving simple mathematics, yet complex in its call for the generation of multiple solution methods, was administered to about 150 U.S. students, most of whom were in fourth grade. Written responses were examined for correctness, evidence of strategy use and mode of explanation. Results for the U.S. sample were also compared to those obtained from about 200 Japanese fourth-grade students. Students in both countries (a) produced multiple solutions and explanations of their solutions, (b) exhibited almost identical patterns and frequency of strategy use across response occasions, and (c) used the same kinds of explanations, with a majority of the responses involving solution explanations that combined both visual and verbal/symbolic features. Nevertheless, Japanese students tended to produce explanations involving more sophisticated mathematical ideas (multiplication rather than addition) and formalisms (mathematical expressions rather than verbal explanations) than did U.S. students.

GENERATING MULTIPLE SOLUTIONS

How many marbles are there in the picture below?



FIND THE ANSWER IN AS MANY DIFFERENT WAYS AS YOU CAN. Write your ways of finding the answer and write your answer.

Fig. 1. The Marble Arrangement Problem

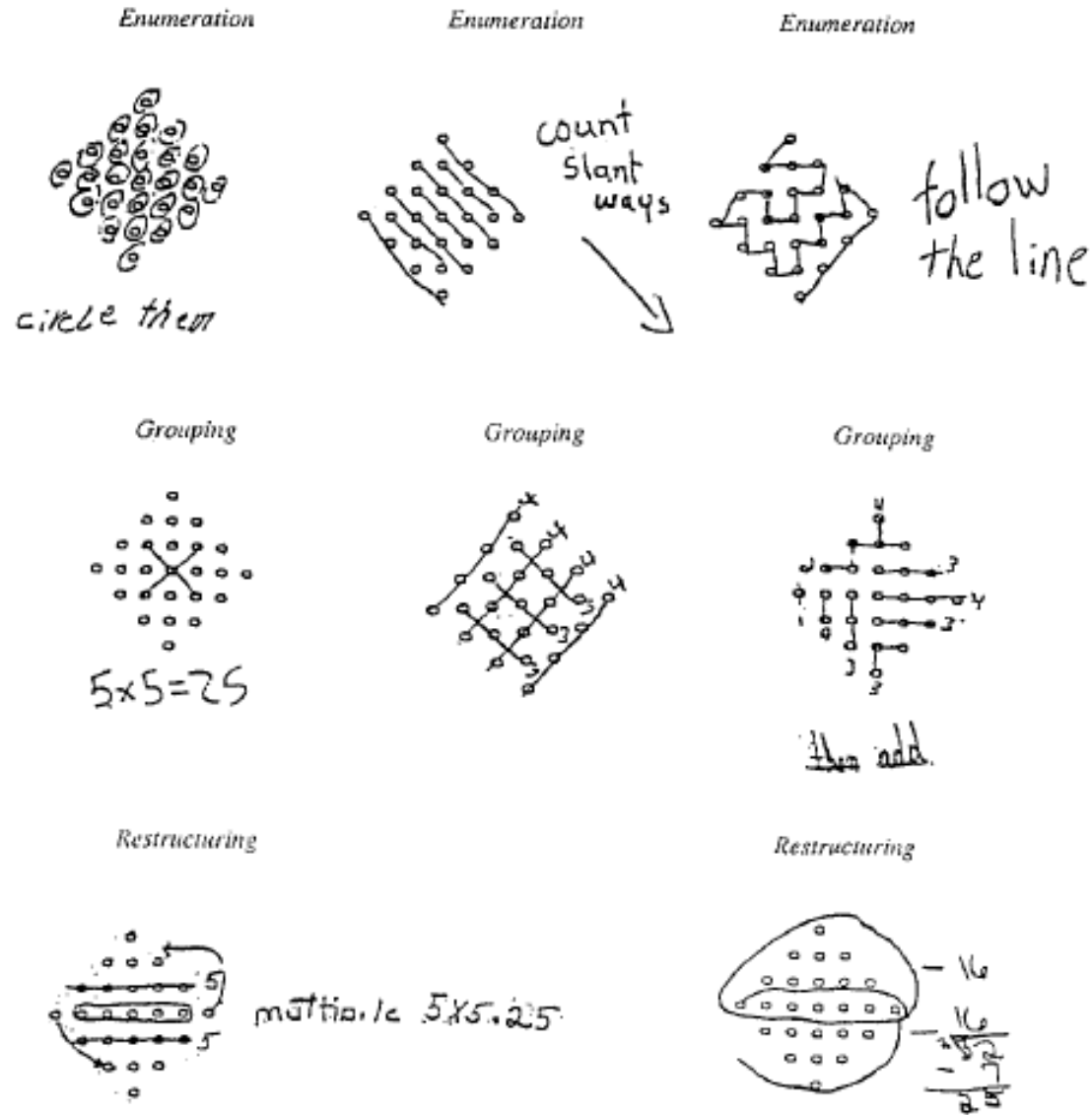


Fig. 2. Examples of Solution Strategies in Each Category

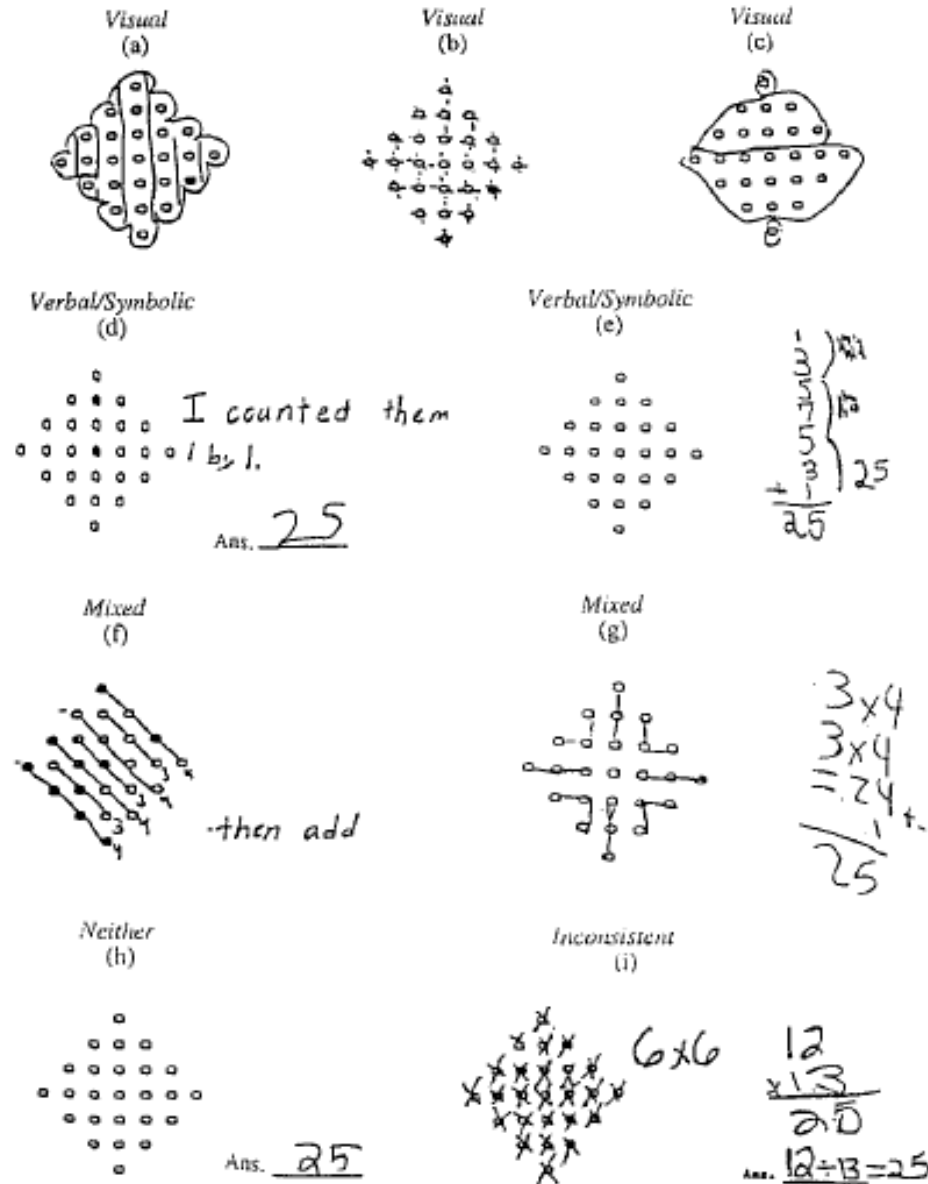
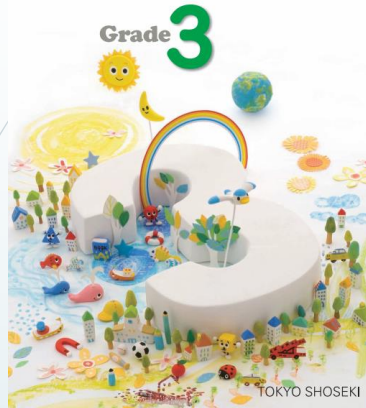
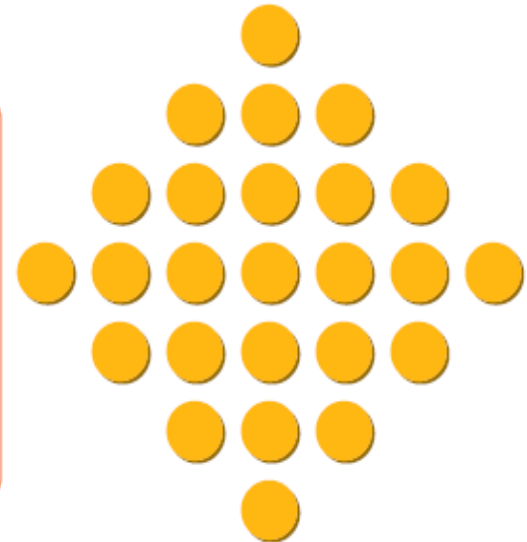


Fig. 3. Examples of Modes of Explanation in Each Category

Mathematics International

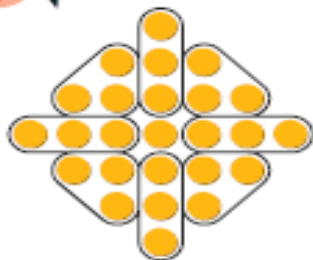


How many ● are there? Write how to calculate the total number in one math sentence, and then find the answer.





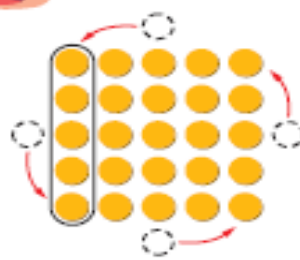
Yumi



I saw 8 groups of 3 and 1 more.



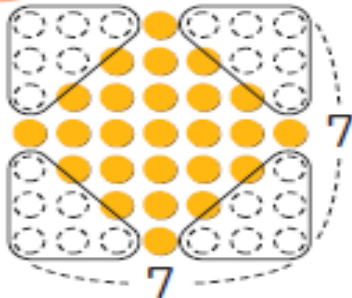
Takumi



I moved some
● to make a square.



Shinji



$$7 \times 7 - 6 \times 4$$



Miho



$$4 \times 4 + 3 \times 3$$

- 1 Write one math sentence for Yumi's method and one for Takumi's method.
- 2 Explain Shinji's idea.
- 3 Look at the math sentence Miho wrote. Explain her idea using diagrams and words.



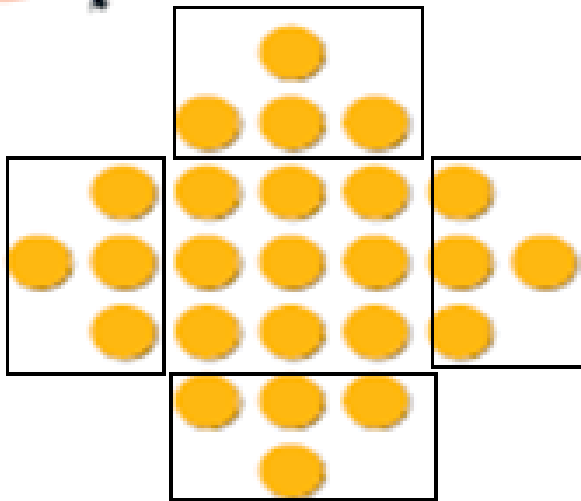
What does 6×4 in Shinji's idea represent?



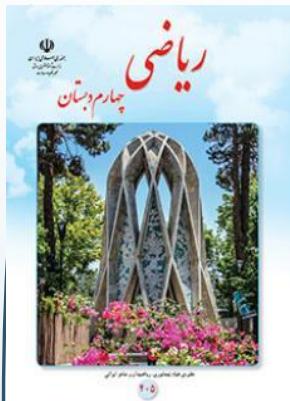
Try to draw on Miho's picture above. There is more than one way to group the dots to match Miho's math sentence.



Miho



$$4 \times 4 + 3 \times 3$$



هر کدام از شکل های زیر از تعدادی دایره درست شده است. اگر شکل ها را به همین ترتیب ادامه دهیم، تعداد دایره های شکل هفتم چقدر است؟



شکل (۱)



شکل (۲)



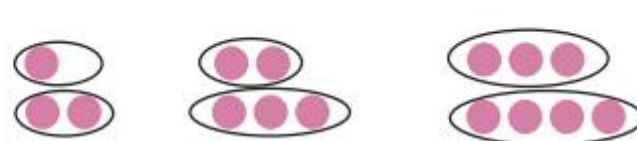
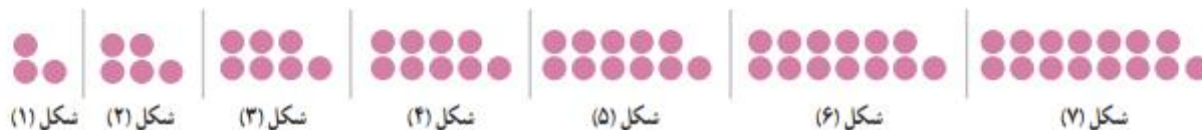
شکل (۳)

?

شکل (۷)

چهار دانش آموز این مسئله را حل کرده و تعداد دایره های شکل هفتم را به دست آورده اند. راه حل های آنها را بررسی کنید و توضیح دهید. کار آنها را کامل کنید.

(۱) راه حل مهدی :



(۲) راه حل امید :

$$= 7 + 8 = \text{تعداد دایره های شکل هفتم}$$



(۳) راه حل سعید :

$$= (7 \times 2) + 1 = \text{تعداد دایره های شکل هفتم}$$



$$(2 \times 2) - 1$$



$$(3 \times 2) - 1$$



$$(4 \times 2) - 1$$

۴) راه حلّ نوید :

$$= 1 - (2 \times 8) = \text{تعداد دایره‌های شکل هفتم}$$

آیا شما می‌توانید روش دیگری پیدا کنید؟

آیا امکان دارد که تعداد دایره‌ها در یکی از شکل‌ها ۱۲ تا شود؟ چرا؟

آیا می‌توانید تعداد دایره‌های شکل چهارم را به دست آورید؟

۹



$$1 \times 3$$



$$2 \times 3 - 1$$

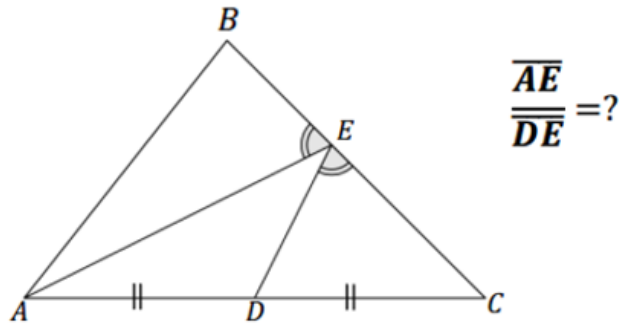


$$(3 \times 3) - 2$$



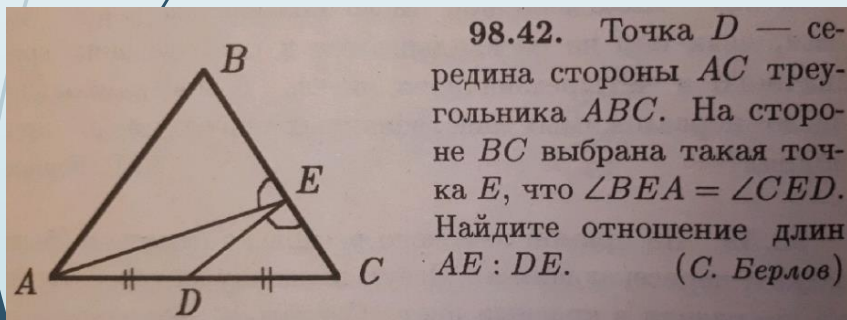
$$(4 \times 3) - 3$$

در مثلث ABC ، نقطه‌ی D وسط ضلع AC است و نقطه‌ی E روی ضلع BC چنان اختیار شده است که اندازه‌های زاویه‌های AEB و DEC با هم برابرند. تعیین کنید:



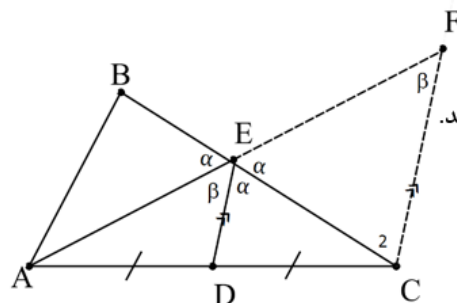
منبع: المپیادهای ریاضی سنت پترزبورگ،
سال ۱۹۹۸، پایه هشتم

در کارگاه‌های آموزش حل مسئله در دانشگاه تربیت دبیر شهید رجایی و کارگاه‌های ویژه معلمان ریاضی بیش از ۳۰ روش (علاوه بر راه حل مطرح شده توسط طراح) برای این مسئله توسط دانشجویان و دبیران محترم ریاضی ارائه شده است. از جمله ویژگی‌های یک مسئله خوب این است که روش‌های متفاوتی برای حل آن قابل ارائه باشد. راه حل شما چیست؟



هندس به منظور استفاده از راه‌حل‌های چندگانه به منزله یک معدن
طلاست (لواو-وینبرگ و لیکین، 2010).

روش شمار ۲:



لم مسئله: از نقطه C به موازات DE رسم می‌کنیم تا امتداد AE را در F قطع کند.

قضایا و تعاریف مورد استفاده: قضیه تالس و قضیه خطوط موازی و مورب.

قضیه تالس:

هرگاه در یک مثلث، خطی موازی یکی از اضلاع، دو ضلع دیگر مثلث را در دو نقطه قطع کند: روی آن دو ضلع چهار پاره خط جدا می‌کند که اندازه‌های آنها تشکیل یک تناسب را می‌دهند.

$$DE \parallel FC \xRightarrow{\text{تالس}} \frac{AD}{AC} = \frac{AE}{AF} = \frac{1}{2} \Rightarrow AE = EF \quad \text{I}$$

$$DE \parallel FC, AF \not\parallel \Rightarrow \hat{F} = \beta$$

$$2\alpha + \beta = 180^\circ$$

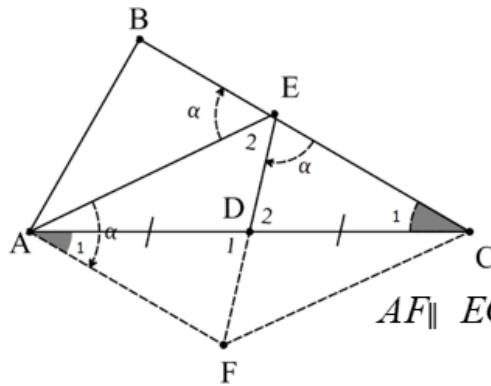
$$\left. \begin{array}{l} \hat{EFC} : \beta + \alpha + \hat{C}_r = 180^\circ \\ \hat{EFC} : \beta + \alpha + \hat{C}_r = 180^\circ \end{array} \right\} \Rightarrow \hat{C}_r = \alpha \Rightarrow \triangle EFC : FC = FE \quad \text{II}$$

متساوی الساقین

$$\frac{AC}{AD} = \frac{CF}{DE} \xRightarrow{\text{II}} \frac{AC}{AD} = \frac{EF}{DE} \xRightarrow{\text{I}} \frac{AC}{AD} = \frac{AE}{DE} = 2$$

لم مسئله: از نقطه A خطی به موازات BC رسم می‌کنیم تا امتداد DE را در F قطع کند.

قضایا و تعاریف مورد استفاده: قضیه خطوط موازی و مورب، خواص متوازی الاضلاع و مثلث متساوی الساقین، همنهشتی مثلث‌ها.



$$\left. \begin{array}{l} AF \parallel EC, AC \nmid \Rightarrow \hat{A} = \hat{C} \\ AD = DC \\ \hat{D} = \hat{D} \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle ADF \cong \triangle DEC \Rightarrow AF = EC \quad \text{I} \quad (\text{زض ز})$$

$$\left. \begin{array}{l} AF \parallel EC \\ AF = EC \end{array} \right\} \Rightarrow AECF : EF = 2DE \quad \text{II} \quad \text{در متوازی الاضلاع قطرها منصفند.}$$

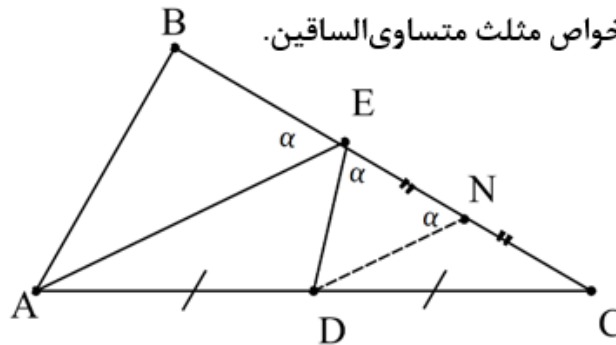
$$\left. \begin{array}{l} AF \parallel EC, EF \nmid \Rightarrow \hat{AFE} = \hat{FEC} = \alpha \\ AF \parallel EC, AE \nmid \Rightarrow \hat{FAE} = \hat{BEA} = \alpha \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle AEF : EF = AE \quad \text{III} \quad \text{متساوی الساقین}$$

$$\text{II}, \text{III} \Rightarrow \frac{AE}{DE} = 2$$

روش شماره ۱۱:

لم مسئله: از D به نقطه N وسط EC وصل می کنیم.

قضایا و تعاریف مورد استفاده: عکس تالس، قضیه خطوط موازی و مورب، خواص مثلث متساوی الساقین.



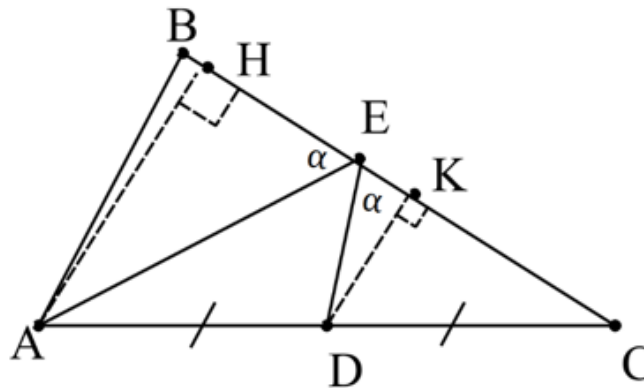
$$\frac{CN}{CE} = \frac{CD}{AC} = \frac{1}{2} \xRightarrow{\text{عکس تالس}} DN \parallel AE \xRightarrow{\text{تعمیم تالس}} \frac{DN}{AE} = \frac{1}{2}$$

$$DN \parallel AE, BC \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \hat{DNE} = \hat{AEB} = \alpha \\ \hat{AEB} = \hat{NED} = \alpha \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle END : DE = DN \quad \boxed{\text{I}}$$

متساوی الساقین

$$\frac{AE}{DE} \stackrel{\boxed{\text{I}}}{=} \frac{AE}{DN} = 2$$

روش شماره ۲۴:



لم مسئله: ارتفاعهای AH, DK را رسم می‌کنیم.

قضایا و تعاریف مورد استفاده: تشابه مثلث‌ها.

$$\left. \begin{array}{l} \hat{H} = \hat{K} = 90^\circ \\ \hat{AEH} = \hat{DEK} = \alpha \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle AEH \sim \triangle DEK \Rightarrow \frac{AE}{DE} = \frac{AH}{DK} = \frac{EH}{EK}$$

$$\left. \begin{array}{l} \hat{C} = \hat{C} \\ \hat{H} = \hat{K} = 90^\circ \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle AHC \sim \triangle DKC \Rightarrow \frac{AC}{DC} = \frac{AH}{DK} = \frac{CH}{CK} = \gamma$$

$$\frac{AE}{DE} = \frac{AH}{DK} = \gamma$$

ریاضی مقدماتی - کارشناسی آموزش ریاضی

۲- فرصت‌های یادگیری، محتوای درس و ساختار آن

▪ بخش پذیری و همنهشتی‌ها

اعداد طبیعی و اصل استقرار اعداد صحیح، بخش پذیری، ویژگی‌های بخش پذیری، عددهای اول، تاریخچه اعداد اول، اثبات نامتناهی بودن اعداد اول، تجزیه به حاصلضرب عوامل اول، بزرگترین مقسوم علیه مشترک و کوچکترین مضرب مشترک، تعریف همنهشتی، ویژگی‌های رابطه همنهشتی، افزای مجموعه اعداد صحیح به کمک مفهوم همنهشتی.

▪ اعداد حقیقی

اعداد گویا، پیدایش اعداد گنگ، ارائه نمونه‌هایی از اعداد گنگ، ساختمان مجموعه اعداد حقیقی، ترتیب روی اعداد حقیقی، نامساوی‌ها و ویژگی‌های آنها، بازه‌های اعداد حقیقی، قدرمطلق و جزء صحیح اعداد حقیقی، نمایش بسط اعشاری برای اعداد حقیقی، مقایسه بسط اعشاری اعداد گویا و گنگ، مطالب مقدماتی درباره تقریب اعداد گنگ با گویا.

▪ عبارت‌های جبری

تعریف عبارت جبری، یادآوری اتحادها، شیوه‌های تجزیه عبارت‌های جبری، چندجمله‌ای‌ها و عبارت‌های گویا، تعریف اعمال جمع و ضرب و تقسیم روی چندجمله‌ای‌ها، یافتن باقیمانده تقسیم، تجزیه چندجمله‌ای‌ها، یافتن ریشه‌های چندجمله‌ای‌ها، روش‌های تجزیه کسرها، معادله‌های چندجمله‌ای به ویژه از درجه دو و درجه سه و بستر سازی برای ورود به اعداد مختلط، اشاره به برخی نامعادلات جبری درجه یک و دو و کاربردهای آنها.

▪ مثلثات



زاویه، واحدهای اندازه گیری زاویه (درجه، گراد، رادیان)، مثلثات در دایره، مثلثات قائم الزاویه، خطوط مثلثاتی زاویه‌های ترکیبی، فرمول‌ها و اتحادهای مثلثاتی، معادله‌های مثلثاتی غیر کلاسیک، معادله‌های مثلثاتی کلاسیک نوع اول تا چهارم، حل مثلث (یافتن کمیت‌های وابسته به مثلث به روش مثلثاتی)، نمونه‌هایی از کاربرد مثلثات در علوم دیگر به‌ویژه در فیزیک.

▪ هندسه تحلیلی

معرفی صفحه دکارتی، مختصات دکارتی در صفحه، مختصات قطبی در صفحه و رابطه آن با مختصات دکارتی، معادله خط در صفحه، اوضاع نسبی خط‌ها در صفحه، دستور فاصله نقطه از خط، بردارها در صفحه، نمایش جبری و هندسی بردارها، جمع برداری و ضرب در عدد، ضرب داخلی بردارها و ویژگی‌های آن، آشنایی با مقاطع مخروطی: بیضی، سهمی، هذلولی، معادلات تبدیل دستگاه‌ها و کاربرد در مقاطع مخروطی.

▪ عددهای مختلط

بیان ریشه‌های پیدایش اعداد مختلط در پیوند با حل معادلات چندجمله‌ای، عمل‌های جبری جمع و ضرب و تقسیم روی اعداد مختلط، مزدوج مختلط و ویژگی‌های آن، آرگومان و قدر مطلق اعداد مختلط، نمایش هندسی و مثلثاتی اعداد مختلط، محاسبه توان و ریشه اعداد مختلط، فرمول دو موآور و کاربردهای آن.

▪ دنباله‌ها

آشنایی با نمادهای مجموع و حاصلضرب، تعریف دنباله به‌عنوان آرایه‌ای از اعداد، روش‌های گوناگون تعریف دنباله‌ها (نوشتن جمله‌ها، دستور جمله عمومی، رابطه‌های بازگشتی و ...)، ارائه مثال‌هایی از برخی دنباله‌های ساده و جذاب، تصاعد حسابی، تصاعد هندسی، شناخت رفتار حدی دنباله‌ها به روش عددی و هندسی، بررسی همگرایی برخی دنباله‌های ساده، اعمال جبری روی دنباله‌های همگرا همراه با مثال‌های متعدد، مجموع جمله‌های تصاعد هندسی (صرفاً به‌منظور کاربردهای بعدی و ایجاد انگیزه برای تعریف سری و محاسبه مجموع سری).

**A Friendly Mathematics
Competition**
35 Years of Teamwork in Indiana

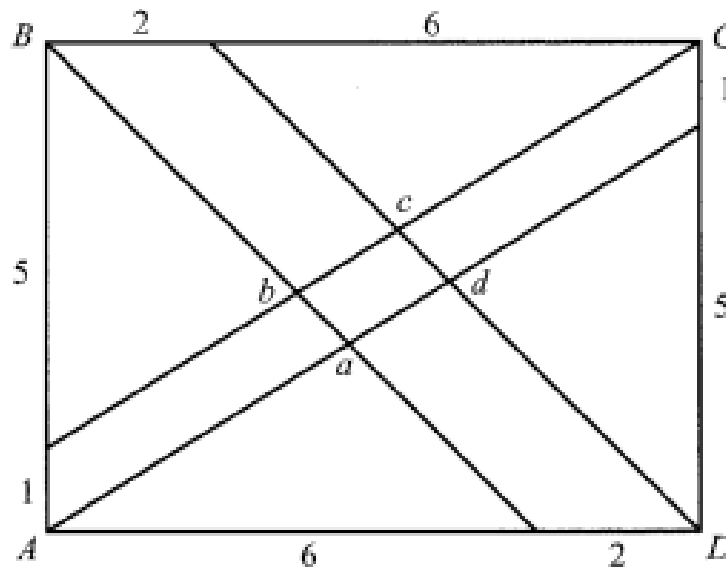
Edited by
Rick Gillman
Valparaiso University

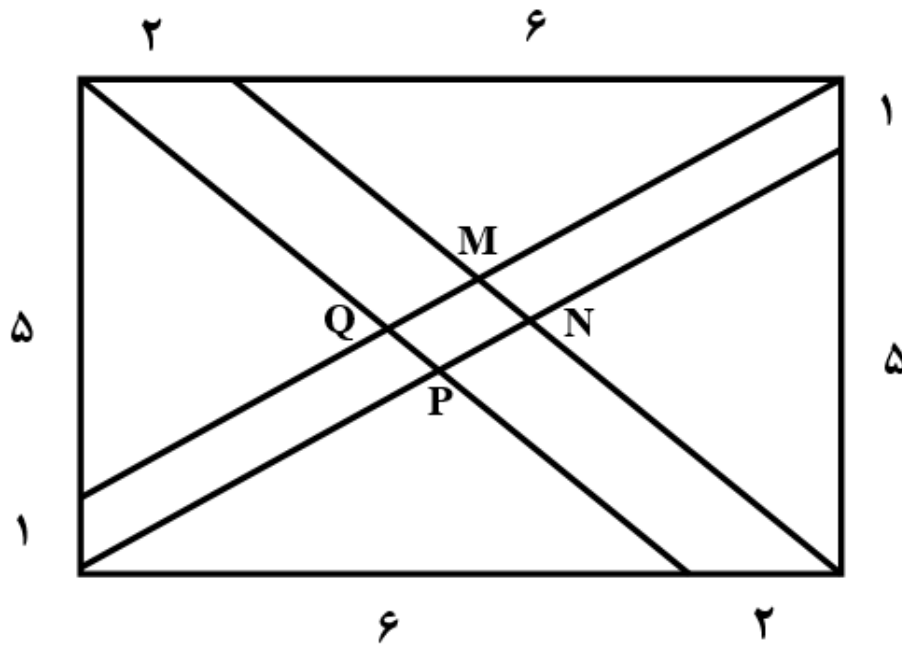
© 2003 by
The Mathematical Association of America (Incorporated)
Library of Congress Catalog Card Number 2002107971
ISBN 0-88385-808-8
Printed in the United States of America
Current Printing (Year digit):
10 9 8 7 6 5 4 3 2 1



Published and Distributed by
The Mathematical Association of America

P1993-8. In the figure below, $ABCD$ is a rectangle. Find the area of the parallelogram $abcd$.





هندسه تحلیلی

افراز

انتگرال معین

انتگرال دوگانه

تقارن

مثلثات

قضیه تالس

ضرب برداری

نسبت و تناسب

مؤلفین کتاب‌های درسی ریاضی دوره ابتدایی، دوره اول متوسطه و دوره دوم متوسطه نظری



برحوم سید محمد کاظم نائینی



حمیدرضا امیری



محمدرضا سید صالحی



محمد حسن بیژن زاده



مجتبی قربانی آرانی



محمد هاشم رستمی



ابراهیم ریحانی



وحید عالمیان



آرش رستگار



خسرو داودی



عادل محمدپور



رضا حیدری قرلجه



احسان بهرامی سامانی



هوشنگ شرقی



حسین خسروآبادی



علی ایرانمنش



احمد شاهورانی



مهدی ایزدی



بهمن اصلاح پذیر



میر شهرام صدر



هادی مین‌باشیان



محمد تقی طاهری تنجانی



آزاده قاهری



آناهیتا کمیجانی



سپهلا خداکریم



کبری دلشاد



زهرا رحیمی



شادی صفی‌نیا



زهره بندی



شفیقه صفاری آذر



علی قصاب



امید نقشینه ارجمند



محمد باقر اسدی



علی رنجبری



محمد علی فریبرزى عراقی



محمود نصیری



آرادبه حسین فرزاد



حسین میرزایی



محمود داورزنی





اسلایدهای ارائه شده در شبکه آموزش ریاضی در پیام رسان های سروش، ایتا و بله به
آدرس @negarmathedu قرار داده می شود.